Prima: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 1, No. 1, Juli 2017, hal. 33-42
P-ISSN: 2579-9827, E-ISSN: 2580-2216

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL DIFUSI NON HOMOGEN SATU DIMENSI

Rukmono Budi Utomo
Universitas Muhammadiyah Tangerang, Jl. Perintis Kemerdekaan I/33, Cikokol, Kota Tangerang, Banten, (021) 553 9532
e-mail: rukmono.budi.u@mail.ugm.ac.id

Abstrak

Dalam penelitian kali ini, akan diuraikan teori Persamaan Differensial Parsial (PDP) Difusi non homogen satu dimensi. Penelitian akan dilakukan dengan mengulas terlebih dahulu sedikit teori tentang PDP Difusi homogen satu dimensi beserta solusinya, kemudian menguraikan teori PDP Difusi non homogen beserta solusinya. PDP Difusi non homogen satu dmensi dikembangkan berdasarkan teori PDP Difusi homogen satu dimensi yakni dengan mencari solusi partikulirnya. Dalam pencarian solusi partikulir, akan dilibatkan berbagai aturan yang terkait seperti aturan Leibniz dan fungsi Dirac Delta.

Kata Kunci: PDP, Difusi non hmomogen, Aturan Leibniz, Fungsi Dirac Delta

Abstract

In this research, we will explore about one dimension diffusion non homogeny Partial Differential Equation (PDE) theory. Research did with review first the theory of one dimension diffusion homogeny with its solution. After that we did more explore to develop this theory become the theory of one dimension diffusion non homogeny PDE with adding particular solution. Particular solution searched using Leibniz and Dirac Delta Theory.

Keywords: PDE, non homogenny diffusion, Leibniz, Dirac Delta

PENDAHULUAN

Persamaan Differensial Parsial (PDP) Difusi menjelaskan persebaran panas pada posisi x saat t atau $U(x,t)$. Berdasarkan hal tersebut, misalkan sebuah pipa lurus berbentuk tabung berisikan cairan tak bergerak yang mengandung zat kimia atau polutan dan menyebar melewati cairan tersebut. Dalam hal ini ingin diselidiki konsentrasi polutan pada posisi x saat t. Dalam hal lain yang serupa misalnya sebatang logam dipanasi pada salah satu bagian ujungnya, akan diselelidiki persebaran panas tersebut disepanjang batang logam tersebut. Kedua contoh di atas merupakan gambaran atau ilustrasi dari PDP Difusi.

PDP Difusi berdasarkan sifat kehomogenannya dibagi atas dua, yakni PDP Difusi homogen dan PDP Difusi non homogen. Berdasarkan syarat batasnya, PDP Difusi juga dibagi atas dua, yakni PDP Difusi dengan syarat batas Dirichlect yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi ganjil dan PDP Difusi dengan syarat batas Neumaan yang berkorespondensi dengan peluasan fungsi genap.

PDP Difusi homogen memberi arti bahwa sistem diasumsikan homogen atau tanpa adanya gangguan dari luar yang memperngaruhi sistem tersebut, sedangkan PDP Panas non homogen memberi arti bahwa sistem memperhatikan adanya gangguan dari luar terhadap sistem tersebut. Gangguan pada sistem untuk PDP Difusi non homegen dapat berupa penambahan atau pengurangan suhu atau tempratur. Gangguan sistem yang berupa penambahan suhu disebut *Source*, seangkan gangguan yang berupa penambahan suhu disebut *Sink*.

PDP Difusi non homogen dikembangkan berdasarkan teori PDP difusi homogen, yakni dengan mencari solusi partikulirnya. Berdasarkan hal tersebut, dalam tulisan ini, untuk membahas teori PDP Difusinon homogeny berserta pencarian solusinya, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai PDP Difusi homogen. Dengan demikian diharapkan alur penjabaran teori PDP Difusi non homogeny beserta solusinya dapat terstruktur dan runtut.

PDP Difusi Homogen pada selang $(-\infty,\infty)$ diawali dengan memperhatika fenomena sebuah cairan tak bergerak yang mengisi sebuah pipa atau tabung lurus. Berdasarkan hal tersebut akan diselidiki konsentrasi zat kimia yang menyebar melewati cairan tersebut pada posisi x saat t. Konsentrasi polutan pada posisi x saat t dinotasikan dengan $U(x,t)$ yang merupakan solusi pari PDP Difusi. Untuk mencari solusi $U(x,t)$ tentu saja pertama kali harus dicari terlebih dahulu mengenai Persamaan Difusi yang dimaksud. Massa dari suatu polutan saat t didefinisikan dengan

$$M(t) = \int_0^x U(\eta,t)dx \ldots(1)$$

Kemudian apabila persamaan (1) tersebut diturunkan terhadap variabel waktu maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_0^x U_t(\eta,t)dx \ldots(2)$$

Persamaan (2) merepresentasikan perubahan konsentrasi zat tiap satuan waktu. Hukum Fick menyatakan bahwa laju polutan yang masuk (*fluks*) sebanding dengan negatif *gradient* konsentrasi. Dalam matematik, Hukum Fick ini dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dM(t)}{dt} = kU_x(x,t) - kU_x(0,t) \ldots(3)$$

Dengan memandang bentuk persamaan (2) dan (3),akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\int_0^x U_t(\eta,t)dx = kU_x(x,t) - kU_x(0,t)$$
$$= k\left[U_x(x,t) - U_x(0,t)\right]$$
$$= \int_0^x kU_{xx}(\eta,t)\,dx \quad \ldots(4)$$

Persamaan (4) merupakan PDP Difusi homogen yang dapat dituliskan kembali sebagai

$$U_t = kU_{xx} \Leftrightarrow U_t - kU_{xx} = 0 \ldots(4) \ \square$$

Lebih lanjut akan dicari solusi PDP Difusi pada Interval $\mathbb{R} = (-\infty, -\infty)$ tersebut. Bentuk umum persamaan Difusi dalam interval $\mathbb{R} = (-\infty, -\infty)$ dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} &U_t = kU_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &U(x,0) = \Phi(x) \end{aligned} \quad \ldots(5)$$

Bentuk $U(x,0) = \Phi(x)$ pada persamaan (5) merupakan syarat awal untuk PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}$ yang merepresentasikan solusi $U(x,t)$ saat $t = 0$ bernilai $\varnothing(x)$. Lebih lanjut, akan dicari solusi $U(x,t)$ pada persamaan (5).

Sebelum dilakukan pencarian solusi $U(x,t)$ pada persamaan (5), dikenalkan terlebih dahulu 5 sifat invariant dengan $U(x,t)$ merupakan solusi persamaan yang ditunjukkan pada persamaan (5), kelima sifat tersebut antara lain:

1. Apabila $U(x,t)$ merupakan solusi persamaan (5), maka $U(x-y,t)$ juga merupakan solusi bagi persamaan tersebut.
2. Turunan-turunan dari fungsi $U(x,t)$ seperti U_x, U_t dan U_{tt} juga merupakan solusi.
3. Berdasarkan sifat invariant nomer 2, jika U_t dan U_x merupakan solusi persamaan (5), maka juga berlaku sifat superposisi yakni $U_t + U_x$ juga merupakan solusi PDP tersebut
4. Integral dari suatu bentuk solusi PDP Difusi juga merupakan solusi dan
5. Bentuk $U\left(\sqrt{a}x, at\right)$ juga merupakan solusi yang disebut sifat dilatasi.

Dalam sifat invariant di atas, apabila $S(x,t)$ adalah solusi PDP Difusi, maka berdasarkan sifat invariant nomer 1, $S(x-y,t)$ juga solusi PDP tersebut. Lebih lanjut dibentuk fungsi

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy \;\ldots(6)$$

Berdasarkan persamaan (6), dapat ditemukan nilai U_t dan U_{xx} sebagai berikut :

$$U_t(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy \;\ldots(7)$$

$$U_{xx}(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy \;\ldots(8)$$

Dilain pihak, misalkan diberikan suatu fungsi $Q(x,t)$ yang memenuhi persamaan difusi dengan syarat awal

$$Q(x,0)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x<0\end{cases} \ldots(9)$$

Misalkan dibentuk $Q(x,t)=G(P)$ dengan $P=\frac{x}{\sqrt{4kt}}$. Berdasarkan hal tersebut

$$Q_t-kQ_{xx}=\frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}PG^{'}-\frac{1}{4}G^{"}\right]\ldots(10)$$

Karena $Q_t-kQ_{xx}=0$, maka persamaan (10) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}PG^{'}-\frac{1}{4}G^{"}\right]=0 \Leftrightarrow G^{"}+2PG^{'}=0 \;\ldots(11)$$

dan merupakan Persamaan Differensial Biasa homogen orde 2. Dari persamaan (11), solusi umum $Q(x,t)$ adalah

$$Q(x,t)=C_1\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}\,dp+C_2 \;\ldots(12)$$

Dengan memandang syarat awal pada persamaan (9), maka akan ditentukan solusi khusus dari PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}$. Berdasarkan syarat awal yang diberikan dapat diperlihatkan bahwa

1. Jika $x>0$, maka nilai $Q(x,t)=1$, dengan demikian diperoleh persamaan

$$C_1\int_{0}^{+\infty} e^{-P^2}\,dp+C_2=1 \Leftrightarrow C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}+C_2=1\ldots(13)$$

2. Jika $x<0$, maka nilai $Q(x,t)=0$, dengan demikian diperoleh persamaan

$$C_1\int_0^{-\infty} e^{-P^2}dp + C_2 = 0 \Leftrightarrow -C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 0 \ldots(14)$$

Dari persamaan (13) dan (14) diperoleh nilai $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ dan $C_2 = \frac{1}{2}$ dan. Berdasarkan hal tersebut, solusi khusus PDP Panas pada interval $\mathbb{R}$ adalah

$$Q(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-P^2}dp + \frac{1}{2} \ldots(15)$$

Lebih lanjut didefinisikan $S(x,t) = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}$, maka berdasarkan hal tersebut diperoleh

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}, t > 0 \ldots(16)$$

Dengan melihat persamaan (16), maka solusi penyelesaian PDP Difusi pada interval $\mathbb{R}$ berdasarkan persamaan (6) adalah

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\Phi(y)dy \ldots(17) \square$$

METODE PENELITIAN

Metode yang dilakukan dalam peneltian ini adalah studi pustaka atau kajian teoritis. Penjabaran teori PDP Difusi non homogen satu dimensi dilakukan dengan mengembangkan teori dari PDP Difusi homogen satu dimensi. Teori PDP Difusi non homogen satu dimensi diadopsi dari tulisan Rukmono Budi Utomo yang dimuat pada Jurnal Silogisme Universitas Muhammadiyah Ponorogo (UMPO) terbitan bulan oktober tahun 2016 volume 1 dengan judul Persamaan Differensial Parsial Difusi Homogen Pada Selang $(-\infty,\infty)$ dengan Kondisi Batas Dirichlet dan Neumann. Jurnal Silogisme UMPO ini dapat diunduh pada laman www.jurnal.umpo.ac.id/index.php/silogisme. Lebih lanjut berdasarkan jurnal tersebut dikembangkan teori PDP Difusi non homogen meski tanpa kondisi Dirichlet ataupun Neumann. Sumber lain yang digunakan dalam penulisan ini juga berupa buku antara lain buku PDP dari Departemen FMIPA ITB, dan buku *Partial Differential Equation* karya Strauss.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan teori PDP Difusi homogen pada selang $(-\infty,\infty)$ dalam tinjauan teoritis di atas, dapat dikembangkan PDP Difusi non homogeny dengan bentuk umum sebagai berikut

$$U_t - kU_{xx} = f(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0 \ldots (18)$$

dengan syarat awal $U(x,0) = \Phi(x)$

Ide atau gagasan untuk menentukan solusi PDP Difusi non homogen ini diadopsi dari solusi Persamaan Differensial Biasa (PDB) non homogen, yakni missal diberikan PDB orde satu non homegen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} y_t + Ay = h(t) \\ y(0) = \Phi(t) \end{array} \ldots (19)$$

Solusi PDB orde satu pada persamaan (19) diselesaikan dengan metode faktor pengintegralan yakni $e^{\int Atdt} = e^{At}$, maka berdasarkan hal tersebut diperoleh solusi sebagai berikut

$$y(t) = e^{-At}\int_0^t e^{As}h(s)\,ds + ce^{-At} \ldots (20)$$

Dengan memandang syarat awal $U(x,0) = \Phi(x)$, maka solusi (20) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$y(t) = \Phi(t)e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-s)}h(s)\,ds \ldots (21)$$

Dengan $\Phi(t)e^{-At}$ merupakan bagian dari solusi homogen dan $\int_0^t e^{-A(t-s)}h(s)\,ds$ merupakan bagian dari solusi partikulir. Lebih lanjut definisikan $S(t) = e^{-At}$, berdasarkan hal tersebut solusi $y(t)$ pada persamaan (21) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$y(t) = S(t)e^{-At} + \int_0^t S(t-s)h(s)\,ds \ldots (22)$$

Ingat solusi fundamental dari PDP Difusi homogen yakni $U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy$, maka dugaan awal solusi PDP Difusi non homogen sesuai dengan persamaan (18) dengan kondisi awal $U(x,0) = \Phi(x)$ adalah sebagai berikut

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds \;\ldots(23)$$

Misalkan $\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy=\wp(t)\Phi(x)$, maka berdasarkan hal tersebut persamaan (23) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$U(x,t)=\wp(t)\Phi(x)+\int_{0}^{t}\wp(t-s)f(x,s)\,ds \;\ldots(24)$$

Perhatikan bahwa $U(x,t)$ pada persamaan (24) ini masih merupakan dugaan atas solusi PDP Difusi non homogen. Berdasarkan hal tersebut untuk memastikan bahwa $U(x,t)$ pada persamaan (24) benar-benar solusi dari PDP Panas non homogeny tersebut, maka harus dibuktikan bahwa bagian partikulir dari persamaan (24) yakni $U_P(x,t)=\int_{0}^{t}\wp(t-s)f(x,s)\,ds$ memenuhi bentuk

$$\left(U_P(x,t)\right)_t-k\left(U_P(x,t)\right)_{xx}=f(x,t)\;\ldots(25)$$

Untuk membuktikan hal ini diperlukan aturan Leibniz. Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial U_P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{0}^{t}\wp(t-s)\,f(x,s)\,ds\right]$$

$$=\int_{0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\wp(t-s)\,f(x,s)\,ds+\lim_{s\to t}\wp(t-s)\,f(x,s)-\wp(t-0)\,f(x,s)\frac{d}{dt}(0)$$

$$=\int_{0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\wp(t-s)\,f(x,s)\,ds+\lim_{s\to t}\wp(t-s)\,f(x,s)\;\ldots(26)$$

Dengan mengingat bahwa $\wp(t-s)\,f(x,s)=\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dy$, maka persamaan (26) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\frac{\partial U_P}{\partial t}=\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}S(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds+\lim_{s\to t}\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dy$$

$$=\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}S(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon)f(y,s)\,dy\;\ldots(27)$$

Lebih lanjut karena $\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\varnothing(y)\,dy$ merupakan solusi homogen dari PDP Difusi non homogen, maka dari persamaan (27) dapat diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy = k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy$$

Atau dapat dituliskan kembali sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x-y,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x-y,t) \ldots(28)$$

Susbtitusikan persamaan (28) kedalam persamaan (27), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial U_P}{\partial t} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} k\frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x-y,t) f(y,s)\,dyds + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon) f(y,s)\,dy \ldots(29)$$

Dengan mengingat fungsi Dirac Delta yakni $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y)\,dy = f(x)$, maka persamaan (29) dapat dituliskan kembli sebagai berikut

$$\frac{\partial U_P}{\partial t} = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t) f(y,s)\,dyds + f(x,t)$$

$$= k\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_P + f(x,t)$$

$$= k(U_P)_{xx} + f(x,t) \ldots(30)$$

Persamaan (30) dapat dituliskan kembali sebagai

$$(U_P)_t - k(U_P)_{xx} = f(x,t) \ldots(31)$$

Yang membuktikan kebenaran dugaan solusi partikulir PDP Difusi non homogen sesuai persamaan (25). Berdasarkan hal tersebut solusi PDP Difusi non homogen sesui persamaan (18) adalah

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)\,dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s) f(y,s)\,dyds \ldots(32)$$

Atau dengan mengingat bahwa $S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}$, maka persamaan (32) di atas dapat dituliskan kembai sebagai

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\Phi(y)dy+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}}f(y,s)dyds\ldots(33)$$

SIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang dapat ditulis dari penelitian ini dijelaskan sebagai berikut:

1. PDP Difusi dapat dikatakan sebagai suatu persamaan differensial parsial yang menjelaskan penyebaran konsentrasi zat polutan pada suatu cairan didalam pipa lurus. Solusi $U=(x,t)$ menjelaskan banyaknya konsentrasi polutasn pada posisi x saat t.
2. Bentuk umum PDP Difusi homogen pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,-\infty)$ ditunjukkan pada persamaan (5) dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan (17).
3. Bentuk umum PDP Difusi non homogen pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,-\infty)$ ditunjukkan pada persamaan (18) dengan solusinya $U=(x,t)$ ditunjukkan pada persamaan (33).

Lebih lanjut saran yang diberikan kepada pembaca yang tertarik meneliti hal serupa, dapat penulis sampaikan sebagai berikut:

1. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Difusi Non homogen pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,-\infty)$ dengan syarat batas Dirichlet yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi ganjil beserta solusi penyelesaiannya.
2. Perlu dikembangkan bentuk umum PDP Difusi Non homogen pada interval $\mathbb{R}=(-\infty,-\infty)$ dengan syarat batas Neumann yang berkorespondensi dengan perluasan fungsi genap beserta solusi penyelesaiannya.

DAFTAR PUSTAKA

Departemen Matematika ITB. (2012). *Persamaan Differensial Parsial.* Bandung: FMIPA ITB

Pinchover & Rubinsten. (2005). *An Introduction to Partial Differential Equations*. London: Cambridge University Press

Strauss, A., Walter. (2008). *Partial Differential Equations: an Introduction.* USA: John Wiley & Sons

Utomo, R. B. (2016). Persamaan Differensial Parsial Difusi Homogen Pada selang $(-\infty,-\infty)$ Dengan Kondisi Batas Dirichlet dan Neumann. Jurnal Silogisme UMPO 1 Oktober

2016 Volume 1 nomor 1 ISSN: 2527-6182. http:// www.jurnal.umpo.ac.id/index.php/silogisme