Prima: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 2, No. 1, Januari 2018, hal. 49-56
P-ISSN: 2579-9827, E-ISSN: 2580-2216

SIFAT-SIFAT HIMPUNAN PROXIMINAL

Arta Ekayanti
Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Jl. Budi Utomo No.10, Ronowijayan, Siman, Kabupaten Ponorogo, Jawa Timur 63471, (0352) 481124
e-mail: arta_ekayanti@ymail.com

Abstrak
Pada artikel ini, akan dipelajari beberapa fakta mengenai himpunan proximinal. Di antaranya, himpunan proximinal pada ruang bernorma linear merupakan himpunan tertutup. Himpunan tertutup pada ruang bernorma linear berdimensi hingga merupakan himpunan proximinal. Himpunan proximinal yang konveks merupakan himpunan Chebyshev.

Kata Kunci: aproksimasi terbaik, himpunan proximinal, himpunan chebyshev, himpunan konveks

Abstract
In this paper, we study about some fact of proximinal set. Such as, proximinal set in normed linear space was closed set. Closed set in finite dimensional normed linear space was proximinal set. Convex proximinal set was Chebyshev set.

Keywords: best approximation, proximinal set, chebyshev set, convex set

PENDAHULUAN

Aproksimasi terbaik merupakan salah satu bahasan penting pada analisis fungsional. Beberapa referensi telah membahas materi mengenai aproksimasi terbaik di antaranya pada buku karangan Kreyszig (1978) telah memberikan pengantar mengenai konsep aproksimasi terbaik pada ruang bernorma, Ghazal (2010) membahas mengenai aproksimasi terbaik dan co-aproksimasi terbaik dalam ruang bernorma. Di samping itu, Vijayaragavan (2013) membahas mengenai aproksimasi terbaik pada ruang bernorma linear, Khalil (1988) telah membahas mengenai aproksimasi terbaik dalam ruang metrik konveks, serta Suharsono (2006) telah membahas mengenai hubungan antara aproksimasi terbaik dengan titik tetap pada ruang metrik konveks. Fokus pada ruang metrik konveks, Aziz (2008) membahas mengenai kaitan antara aproksimasi terbaik dengan titik tetap pada ruang metrik konveks Menger. Pada referensi-referensi tersebut telah dianalisis secara mendalam materi mengenai aproksimasi terbaik. Perlu diperhatikan bahwa, salah satu bahasan yang terkait dengan aproksimasi terbaik di antaranya adalah himpunan proximinal.

Suatu himpunan disebut himpunan proximinal apabila aproksimasi terbaik dari himpunan tersebut memiliki anggota. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai definisi himpunan proximinal serta beberapa sifat yang berlaku pada himpunan proximinal. Penelitian ini diharapkan mampu memberikan kontribusi pada perkembangan ilmu pengetahuan khususnya matematika cabang analisis yaitu analisis fungsional pada topik pembahasan aproksimasi terbaik. Serta memberikan motivasi untuk melakukan penelitian mengenai pemetaan pada himpunan proximinal serta sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Peneliti mengkaji beberapa literatur seperti *Introductory Functional Analysis with Applications* karangan Erwin Kreyszig serta jurnal *Best Approximation in Real Linear 2-Normed Spaces* yang ditulis oleh Vijayaragavan. Dari beberapa referensi tersebut, peneliti mengembangkan bahasan dengan fokus topik pada sifat-sifat himpunan proximinal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1 Diberikan himpunan tak kosong X. Pemetaan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi:

1. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d(x, y) \geq 0$.
2. Untuk setiap $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.
3. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d(x, y) = d(y, x)$.
4. Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku $d(x, y \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Pasangan (X, d) selanjutnya disebut ruang metrik.

Untuk suatu ruang metrik (X, d) dan himpunan S, jarak antara titik $x \in X$ dan himpunan A dinotasikan dengan $d(x, S)$ didefinisikan dengan

$$d(x, S) = \inf \{d(x, y): y \in S\}$$

Definisi 2.2 Diberikan ruang vektor X, pemetaan $||.||: X \to \mathbb{R}$ disebut norma pada X jika memenuhi:

1. Untuk setiap $x \in X$ berlaku $\| x \| \geq 0$.
2. Untuk setiap $x \in X$, $\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.
3. Untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$.
4. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Pasangan $(X, \|.\|)$ selanjutnya disebut ruang bernorma.

Berikut diberikan definisi aproksimasi terbaik.

Definisi 2.3 Diberikan ruang bernorma linear X dan $S \subseteq X$ tak kosong. Elemen $s_0 \in S$ disebut aproksimasi terbaik untuk $x \in X$ jika untuk setiap $s \in S$ berlaku

$$\| x - s_0 \| \leq \| x - s \|.$$

Selanjutnya, dinotasikan $P_S(x) = \{s_0 \in S: \| x - s_0 \| \leq \| x - s \|, \forall s \in S\}$ merupakan koleksi semua aproksimasi terbaik $x \in X$.

Lebih lanjut, himpunan $P_S(x)$ koleksi semua aproksimasi terbaik $x \in X$ dapat dituliskan dengan

$$P_S(x) = \{s_0 \in S: \|x - s_0\| = d(x, S)\}.$$

Jika $P_S(x)$ memiliki anggota, maka S disebut sebagai himpunan proximinal. Hal ini sebagaimana disebutkan pada definisi berikut:

Definisi 2.4 Jika $P_S(X) \neq \emptyset$, S disebut himpunan proximinal.

Untuk suatu $y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ didefinisikan koleksi semua aproksimasi terbaik $P_{S+y}(x + y) = \{s_0 \in S: \| x + y - s_0 \| = d(x, S + y)\}$ dan $P_{\alpha S} = \{s_0 \in S: \| \alpha x - y_0 \| = d(x, \alpha S)\}$. Berikut diberikan teorema yang membahas sifat koleksi semua aproksimasi terbaik.

Teorema 2.1 Diberikan ruang bernorma X dan $S \subseteq X$ tak kosong, maka berlaku

1. $P_{S+y}(x + y) = P_S(x) + y$, untuk setiap $x, y \in X$.
2. $P_{\alpha S}(\alpha x) = \alpha P_S(x)$ untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bukti:

1. Diambil sebarang $y_0 \in P_{S+y}(x + y)$ maka $y_0 \in S + y$ dan $\| x + y - y_0 \| \leq \| x + y - (s + y) \|$ untuk setiap $s + y \in S + y$. Diperoleh $(y_0 - y) \in S$ dan $\| x - (y_0 - y) \| \leq \| x - s \|$ untuk setiap $s \in S$. Artinya $(y_0 - y) \in P_S(x)$, sehingga $y_0 \in P_S(x) + y$. Dengan demikian diperoleh $P_{S+y}(x + y) \subseteq P_S(x) + y$. Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa $P_S(x) + y \subseteq P_{S+y}(x + y)$, sehingga disimpulkan bahwa $P_{S+y}(x + y) = P_S(x) + y$ untuk setiap $x, y \in X$.
2. Diambil $\alpha \in \mathbb{R}$ sebarang. Untuk $\alpha = 0$ trivial. Diperhatikan untuk $\alpha \neq 0$. Diambil sebarang $y_0 \in P_{\alpha S}(\alpha x)$ maka $y_0 \in \alpha S$ dan $\| \alpha x - y_0 \| \leq \| \alpha x - \alpha s \|$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya diperoleh
$$|\alpha| \left\| x - \frac{1}{\alpha} y_0 \right\| \leq |\alpha| \, \| x - s \|$$
untuk setiap $s \in S$. Dengan demikian diperoleh $\frac{1}{\alpha} y_0 \in P_S(x)$ artinya $y_0 \in \alpha P_S(x)$. Jadi, diperoleh $P_{\alpha S}(\alpha x) \subseteq \alpha P_S(x)$. Dapat dibuktikan bahwa $\alpha P_S(x) \subseteq P_{\alpha S}(\alpha x)$, sehingga disimpulkan bahwa $P_{\alpha S}(\alpha x) = \alpha P_S(x)$. ■

Berkaitan dengan teorema di atas, berikut diberikan sifat himpunan proximinal yang berkaitan dengan sifat aljabar.

Teorema 2.2 Diberikan ruang bernorma X dan $S \subseteq X$ tak kosong.

1. Himpunan S proximinal jika hanya jika himpunan $S + y$ proximinal, untuk setiap $y \in X$.
2. Himpunan S proximinal jika hanya jika himpunan αS proximinal untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Bukti:

1. Diketahui S proximinal artinya $P_S(x) \neq \emptyset$. Karena $P_S(x) \neq \emptyset$ maka $P_S(x) + y \neq \emptyset$. Berdasarkan Teorema 2.1 poin 1 berlaku $P_S(x) + y = P_{S+y}(x + y)$, maka $P_{S+y}(x + y) \neq \emptyset$. Artinya $S + y$ proximinal.
2. Diketahui S proximinal maka $P_S(x) \neq \emptyset$. Karena $P_S(x) \neq \emptyset$ maka $\alpha P_S(x) \neq \emptyset$. Berdasarkan Teorema 2.1 poin 2 berlaku $\alpha P_S(x) = P_{\alpha S}(\alpha x)$ maka $P_{\alpha S}(\alpha x) \neq \emptyset$. Artinya αS proximinal. ■

Pada himpunan dikenal sifat terbuka dan tertutup. Tentunya, hal ini juga berlaku untuk himpunan proximinal. Perlu diketahui bahwa himpunan proximinal merupakan himpunan tertutup. Hal ini dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 2.3 Jika X ruang bernorma linear dengan $S \subseteq X$ proximinal maka S tertutup.

Bukti:

Diketahui X ruang bernorma linear. Diambil sebarang barisan $(x_n) \subseteq S$ dengan $\lim(x_n) = x$. Karena S proximinal maka $P_S(x) \neq \emptyset$, dengan demikian terdapat $s_0 \in P_S(x)$ sehingga $\|x - s_0\| \leq \|x - x_n\|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\lim\,(x_n) = x$ maka $\|x - x_n\| \to 0$. Akibatnya, $\|x - s_0\| = 0$ atau $x = s_0$. Artinya, $x \in S$. Dengan kata lain, S tertutup.

■

Lebih lanjut, akan diberikan teorema mengenai sifat tertutup himpunan proximinal.

Teorema 2.4 Diberikan ruang bernorma linear X. Jika X ruang berdimensi hingga maka untuk setiap $S \subseteq X$ tak kosong dan tertutup merupakan himpunan proximinal.

Bukti:

Diambil sebarang $S \subseteq X$ tak kosong dan tertutup. Diambil sebarang $x_0 \in X\backslash S$. Pilih $r_0 = d(x_0, S) = \inf\{d(x_0, s) : s \in S\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $r_0 \neq 0$. Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andai $r_0 = d(x_0, S) = 0$ untuk suatu $x_0 \in S$. Karena $d(x_0, S) = \inf\{d(x_0, s) : s \in S\}$ maka terdapat barisan $(x_n) \subseteq S$ dengan $\lim\big(d(x_0, x_n)\big) = d(x_0, S) = 0$. Karena S tertutup maka terdapat $x \in S$ sehingga $\lim(x_n) = x$, maka $d(x_0, x) =$

0. Akibatnya $x_0 = x \in S$, sehingga diperoleh suatu bentuk kontradiksi. Haruslah $r_0 = d(x_0, S) \neq 0$. Jika $r > r_0$ maka terdapat $y \in S$ sehingga $\|x_0 - y\| < r$. Akibatnya $y \in B(x_0, r) \cap S$. Dengan kata lain, $B(x_0, r) \cap S \neq \emptyset$.

Selanjutnya didefinisikan $\bar{B}(x_0, r) = \{y \in X : \|x_0 - y\| \leq r\}$ dan $B_n = \bar{B}\left(x_0, r_0 + \frac{1}{n}\right) \cap S$. Diperhatikan bahwa $\bar{B}$ tertutup dan terbatas serta diketahui bahwa S merupakan himpunan tertutup dan terbatas maka B_n tertutup dan terbatas. Hal ini mengakibatkan B_n kompak. Lebih lanjut, diperhatikan bahwa jika $y \in B_{n+1}$ maka

$$\|y - x_0\| \leq r + \frac{1}{n+1} \leq r + \frac{1}{n}$$

maka $y \in B_n$ sehingga $B_{n+1} \subseteq B_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $r_0 = d(x_0, S)$ dan $y_0 \in S$ maka

$$\|y_0 - x_0\| \geq r_0.$$

Untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\|y_0 - x_0\| = r_0 = d(x_0, S).$$

Hal ini menunjukkan bahwa y_0 merupakan aproksimasi terbaik untuk x_0. Artinya, S merupakan himpunan proximinal. ■

Untuk suatu ruang vektor X dengan $S \subseteq X$, himpunan S dikatakan konveks apabila untuk setiap $y, z \in S$ berlaku himpunan

$$R = \{r = \alpha y + (1 - \alpha)z : 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

merupakan himpunan bagian dari S.

Berikut diberikan beberapa teorema yang selanjutnya digunakan untuk menunjukkan sifat-sifat yang lain dari himpunan proximinal.

Teorema 2.5 Jika X ruang bernorma linear, $S \subseteq X$ dan $x \in X$ maka $P_S(x)$ himpunan konveks.

Bukti:

Diambil sebarang $s_1, s_2 \in P_S(x)$, maka berlaku $\|x - s_1\| \leq \|x - s\|$ untuk setiap $s \in S$ dan $\|x - s_2\| \leq \|x - s\|$ untuk setiap $s \in S$. Selanjutnya untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq \alpha \leq 1$ dan untuk sebarang $s \in S$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|x-(\alpha s_1+(1-\alpha)s_2)\| &= \|x-\alpha s_1-s_2+\alpha s_2\| \\
&= \|x-\alpha s_1-s_2+\alpha s_2-\alpha x+\alpha x\| \\
&= \|\alpha x-\alpha s_1+x-\alpha x-s_2+\alpha s_2\| \\
&= \|\alpha(x-s_1)+(1-\alpha)(x-s_2)\| \\
&\leq \alpha\|x-s_1\|+(1-\alpha)\|x-s_2\| \\
&\leq \alpha\|x-s\|+(1-\alpha)\|x-s\| \\
&= \|x-s\|
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\|x-(\alpha s_1+(1-\alpha)s_2)\| \leq \|x-s\|$$

Artinya $(\alpha s_1+(1-\alpha)s_2) \in P_S(x)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $P_S(x)$ merupakan himpunan konveks. ■

Berdasarkan Definisi 2.3, suatu himpunan merupakan himpunan proximinal apabila setiap anggota dari semesta yang dibicarakan minimal mempunyai satu aproksimasi terbaik pada suatu himpunan bagiannya. Berikut diberikan definisi kasus khusus dari himpunan proximinal.

Definisi 2.5 Diberikan ruang bernorma X. Jika untuk setiap $x \in X$ memiliki aproksimasi terbaik tunggal pada S, maka S disebut himpunan Chebyshev dari X.

Dari Definisi 2.5 diatas, dapat diketahui bahwa himpunan S disebut himpunan Chebyshev jika hanya jika $P_S(x)$ hanya mempunyai satu anggota (singleton). Lebih lanjut, berikut diberikan sifat himpunan proximinal yang berkaitan dengan konveks dan Chebyshev. Berdasarkan definisi aproksimasi terbaik dapat diperoleh hubungan bahwa S konveks jika dan hanya jika $P_S(x)$ konveks.

Teorema 2.6 Jika X ruang bernorma linear dan $S \subseteq X$ maka untuk setiap $x \in X$ memiliki aproksimasi tunggal di S. Dengan kata lain, setiap himpunan proximinal konveks merupakan himpunan Chebyshev.

Bukti:

Diambil sebarang $x \in X$ dan $s_1, s_2 \in S$. Karena S konveks maka $\frac{s_1+s_2}{2} \in S$ dan karena $P_S(x)$ konveks maka $\frac{s_1+s_2}{2} \in P_S(x)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} d(x,S) &= \left\| x - \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2}(x - s_1) + \frac{1}{2}(x - s_2) \right\| \\ &\le \frac{1}{2}\|x - s_1\| + \frac{1}{2}\|x - s_2\| \\ &= \frac{1}{2}d(x,S) + \frac{1}{2}d(x,S) \\ &= \end{aligned}$$

Dengan demikian berlaku

$$\left\| x - \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \right\| = \frac{1}{2}\|x - s_1\| + \frac{1}{2}\|x - s_2\|.$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga, bentuk tersebut berlaku dengan syarat terdapat $p \in \mathbb{R}$ dengan $p > 0$ sehingga $x - s_1 = p(x - s_2)$. Akan tetapi

$$x - s_1 = d(x,S) = x - s_2$$

Oleh karena itu, didapatkan hasil $p = 1$. Artinya $s_1 = s_2$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa S merupakan himpunan Chebyshev. ■

SIMPULAN DAN SARAN

Sifat-sifat himpunan proximinal di antaranya:

1. Memenuhi sifat aljabar perjumlahan dan perkalian skalar yaitu ketika himpunan $S \subseteq X$ proximinal maka $S + y$ dan αS juga merupakan himpunan proximinal untuk sebarang $y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}\{0\}$.
2. Himpunan proximinal S yang merupakan himpunan bagian dari ruang bernorma linear adalah himpunan tertutup.
3. Himpunan bagian tertutup dari suatu ruang bernorma linear berdimensi hingga merupakan himpunan proximinal.
4. Setiap himpunan proximinal konveks merupakan himpunan Chebyshev.

Setelah mengetahui sifat-sifat himpunan proximinal, selanjutnya dapat diteliti lebih lanjut terkait pemetaan pada himpunan proximinal serta sifat-sifat dari pemetaan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Aziz, D. (2008). Kaitan Antara Himpunan Konveks, Titik Tetap dan Aproksimasi Terbaik pada Ruang Metrik Menger. *Jurnal Sains MIPA*, *14*(2), 126–128.

Ghazal, A. M. A. (2010). *Best approximation and best co-approximation in normed space*

Best Approximation and Best Co − approximation in Normed Spaces. THE ISLAMIC UNIVERSITY OF GAZA. Retrieved from http://library.iugaza.edu.ps/Thesis/88068.pdf

Khalil, R. (1988). Best Approximation in Metric Spaces. In *Proceeding of The American Mathematical Society* (Vol. 103, pp. 579–586). https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70635-2

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/zamm.19660460126

Suharsono, S. (2006). Aproksimasi Terbaik dalam Ruang Metrik Konveks. In *Seminar Nasional MIPA 2006* (Vol. 1, pp. 1–7). Yogyakarta. Retrieved from http://eprints.uny.ac.id/11964/1/M-1 Suharsono S.pdf

Vijayaragavan, R. (2013). Best Approximation in Real Linear 2-Normed Spaces. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), 6*(3), 16–24.